Trigonométrie

4ème HGT - Outil d'accompagnement du programme D/2014/7362/3/06

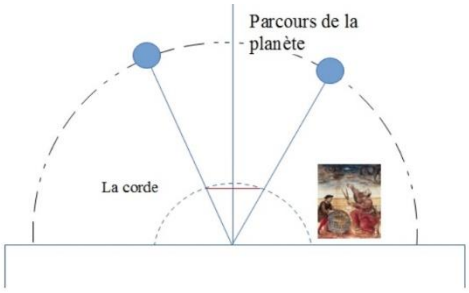
Secteur Mathématique
2019-2020

ENSEIGNEMENT CATHOLIQUE
SECONDAIRE

Introduction

La trigonométrie est une branche des mathématiques qui s'est développée, pendant plusieurs siècles, de la Grèce à l'Occident, en passant par l'Inde et le monde musulman. Dans nos différents programmes, elle est abordée en 3ème dans le triangle rectangle avant d'être étudiée dans le cercle en 4ème pour ensuite être intégrée, en 5ème, dans la partie analytique comme fonction modélisant des phénomènes périodiques.

Au départ, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude de l'univers. Les mathématiciens grecs l'ont développée pour répondre aux besoins de l'astronomie à laquelle elle est intimement associée. Ils souhaitaient cartographier la sphère des étoiles c'est-à-dire évaluer la distance angulaire entre celles-ci. Le support utilisé pour représenter ce contexte était le cercle. Hipparque (190-120 ACN), astronome et mathématicien grec, fut le premier à publier des « Tables de cordes », associant un angle à la mesure de la corde correspondante, prémisses de la notion de fonction sinus.



La corde d'Hipparque de Nicée

Vers le IXe siècle, les mathématiciens arabes ont séparé la trigonométrie de l'astronomie et de la géométrie, pour la définir comme une branche des mathématiques à part entière. Au XIIIe siècle, l'étude des triangles inscrits dans un cercle leur permit de rapprocher la trigonométrie du cercle et celle du triangle.

Ces quelques repères mettent en évidence une évolution historique du concept différente de l'organisation curriculaire[1], ce qui pourrait expliquer certaines difficultés liées à son apprentissage.

Cependant, ne perdons pas de vue que l'histoire ne fournit à elle seule ni la clé, ni la solution aux problèmes d'enseignement d'un concept mathématique.

- ✓ Que contient cet outil ?

Cet outil propose un parcours d'enseignement de l'UAA de « Trigonométrie » en 4ème quelque peu différent de ce que nous avons l'habitude de rencontrer. Fréquemment, on définit le cercle trigonométrique pour y représenter les angles et leurs nombres trigonométriques avant de débuter la résolution de triangles quelconques. Cette approche semble susciter certains obstacles d'apprentissage et n'apporte pas forcément tout le sens que l'élève est en droit d'attendre.

Dans le parcours proposé, après avoir établi la loi des cosinus et des sinus, nous avons décidé de confronter les élèves à la résolution de triangles quelconques sans avoir introduit au préalable le cercle trigonométrique. Le but de cette démarche est double : déstabiliser l'élève et ainsi motiver la définition des nombres trigonométriques d'angles obtus (entre autres), développer l'esprit critique au regard d'un résultat obtenu par une construction ou donné par une calculatrice.

[1] Vous trouverez en annexe une bibliographie reprenant un ensemble d'articles décrivant l'histoire de la trigonométrie.

L'UAA « Trigonométrie » de 4ème vise la résolution des triangles quelconques intervenant dans de nombreux problèmes de triangulation, d'arpentage, de cartographie … Dans ces contextes, la mesure de l'angle sera toujours exprimée en degrés et ne dépassera pas 180°. Néanmoins, dans la continuité de l'introduction du cercle trigonométrique pour les angles entre 0 et 180 degrés, il semble judicieux d'étendre le travail aux angles entre 180 et 360 degrés. Le radian, quant à lui, sera introduit en 5ème. La résolution d'équations ainsi que les angles associés ne sont pas des processus à évaluer en 4ème. Cependant, ce type d'activités peut être proposé aux élèves en apprentissage afin de favoriser la pratique du cercle trigonométrique. Une formalisation trop rapide de l'équation trigonométrique pourrait mettre certains élèves en difficulté.

- ✓ Structure
  1. Les règles des sinus et des cosinus dans le triangle quelconque
  2. La résolution de triangles quelconques
  3. Le cercle trigonométrique en mouvement…
  4. Le cercle trigonométrique en papier…
  5. Exerçons-nous à utiliser le cercle trigonométrique
  6. Tangente géométrique ou tangente trigonométrique ?
  7. Annexe – Quelques repères historiques…

Chaque partie de cet outil débute par une « Fiche élèves » rassemblant quelques activités autour de la thématique ciblée.

Cette fiche est conçue pour être travaillée par l'élève en autonomie, en duo ou par groupe. Ce temps de travail doit être enrichi d'un feedback, d'un temps de structuration des acquis.

Une « Fiche prof » explicite une proposition de méthodologie ainsi que les visées pédagogiques justifiant le choix des activités. Nous vous invitons vivement à la consulter avant de faire vivre les activités aux élèves…

Belle découverte,

Annick Looze, responsable de secteur.

Caractéristiques

Année	4ème HGT
UAA	**Trigonométrie**
Objet de l'outil	Situations d'apprentissage
Prérequis	- Connaitre la définition du sinus, cosinus et tangente d'un angle dans le triangle rectangle. - Savoir calculer une longueur ou un angle dans un triangle rectangle - Connaitre les nombres trigonométriques de 30°, 45°, 60° - Reconnaitre une situation d'application du théorème de Pythagore
Ressources visées	- Définition du sinus, cosinus et tangente d'un angle dans le cercle trigonométrique. - Relations principales : $\mathbf{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \text{ et } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$ - Relation des sinus. - Théorème d'Al Kashi

Objectifs pédagogiques

Généraux :

- Développer l'esprit critique.
- Comprendre le fonctionnement de la calculatrice.
- Amener la généralisation algébrique des formules à partir de situations numériques.

Spécifiques :

- Construire les formules trigonométriques liées au triangle quelconque à partir des connaissances relatives au **triangle rectangle.**
- Utiliser le cercle trigonométrique comme un outil permettant d'illustrer et comprendre toutes les situations rencontrées dans des triangles quelconques.
- Proposer une approche dynamique de la construction du cercle trigonométrique.
- Manipuler le cercle trigonométrique afin de développer des automatismes réfléchis.

1. Etablir les règles des sinus et des cosinus[2] dans le triangle quelconque

Dans toute cette séquence, les notations suivantes sont utilisées dans le triangle ABC :

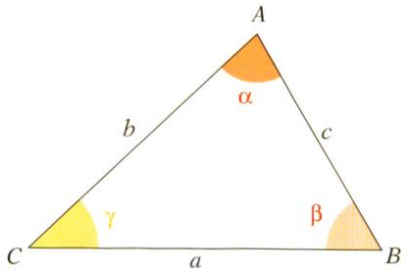
a la longueur du côté [BC], b la longueur du côté [AC] et c la longueur du côté [AB]

α l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$, β l'amplitude de l'angle $\widehat{ABC}$ et γ l'amplitude de l'angle $\widehat{BCA}$

Fiche élèves

Enoncé 1

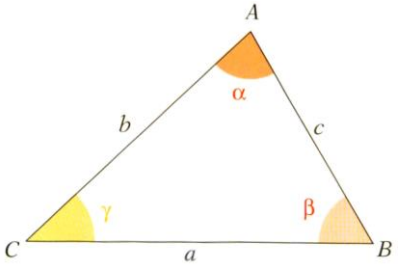
Voici un triangle ABC dont tu connais α qui vaut 80°, γ qui vaut 60° et b qui vaut 3 cm.
Construis aux instruments la situation décrite, **estime** les valeurs des angles et des côtés manquants et **vérifie** par calcul ces derniers.



α	β	γ	a	b	c
80°		60°		3	

Enoncé 2

Voici un triangle ABC dont tu connais β qui vaut 45°, a et c qui valent 2 cm.
Construis aux instruments la situation décrite, **estime** les valeurs des angles et des côtés manquants et **vérifie** par calcul ces derniers.



α	β	γ	a	b	c
	45°		2		2

[2] La règle des cosinus ou le théorème d'Al Kashi.

Fiche prof

Visées pédagogiques

L'activité précédente permet de :

a) Construire les formules trigonométriques liées au triangle quelconque à partir des connaissances relatives au **triangle rectangle.**

b) **Réactiver**, chez les élèves, les notions suivantes :
   - le théorème de Pythagore,
   - la relation des angles dans un triangle,
   - les relations trigonométriques dans le triangle rectangle,
   - les valeurs particulières pour un angle de 60° et de 45°,
   - l'utilisation de la calculatrice,
   - les notions de valeur exacte et valeur approchée,
   - la relation des angles dans un triangle isocèle.

c) Estimer l'ordre de grandeur d'une longueur ou d'une amplitude à partir de **la construction géométrique** en vraie grandeur.

d) Montrer l'intérêt de nouvelles formules en comparaison de caractère long et fastidieux des notions apprises en 3e lorsqu'on veut les appliquer aux triangles quelconques.

e) Généraliser une démarche à partir d'exemples numériques pour dégager de nouvelles formules **(généralisation algébrique).**

Méthodologie

Individuellement, chaque élève réalise les deux énoncés. Une mise en commun permet d'expliciter et de confronter les différentes propositions et démarches élaborées pour y parvenir. Pour faciliter la gestion du temps de correction et d'échanges, les élèves seront invités à utiliser une même notation et un même modèle de triangle acutangle pour toute la classe.

Cette première fiche est composée de 2 énoncés qui visent des objectifs différents :

- L'énoncé 1 permet de partir des prérequis de 3e pour construire les formules visées, dans un cadre numérique.
- L'énoncé 2 permet de réactiver les propriétés relatives au triangle isocèle. Il est suggéré mais non obligatoire.
- Un 3ème énoncé pourrait compléter la fiche élève dans le but de réitérer la démarche dans le cas général.

Les finalités poursuivies par cette fiche sont triples :

- Développer, chez nos élèves, un **regard critique** sur les résultats obtenus. Pour ce faire, trois étapes successives sont complémentaires : représenter la situation aux instruments, estimer le résultat à l'aide d'un instrument de mesure (valeur approximative) et calculer à l'aide de la formule. La première étape permet de visualiser la situation géométrique proposée avant tout calcul. L'estimation donne un ordre de grandeur qui permettra de vérifier si la réponse obtenue par calcul (valeur exacte) est plausible.

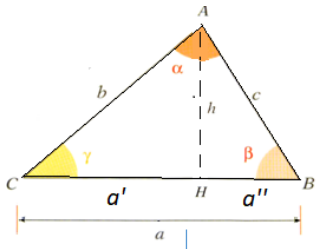
- Confronter les élèves à une **situation inédite** (triangle quelconque). Pour ce faire, les élèves se ramènent à une situation connue (triangle rectangle). Dans ce cas, ils décomposent un triangle quelconque en deux triangles rectangles par le biais du tracé de la hauteur. Cette démarche pour résoudre un triangle quelconque implique de longs et fastidieux calculs. En procédant de la sorte, les élèves prendront conscience de l'intérêt d'en **déduire de nouvelles formules**.

- **Construire les formules** de trigonométrie dans les triangles quelconques en généralisant une démarche numérique qui s'appuie sur les acquis antérieurs des élèves.

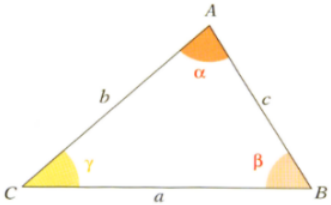
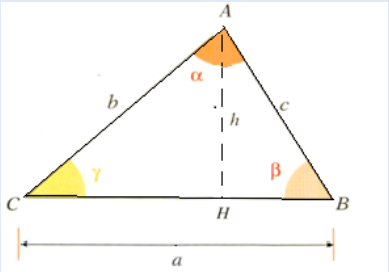
  Cette fiche peut aider l'élève à appréhender les formules utilisées par la suite en leur donnant du sens au travers leur construction. Néanmoins, connaître la démonstration des lois des sinus et cosinus dans le triangle quelconque n'est pas un attendu évaluable ciblé par le programme.

Lorsque cette activité de généralisation est menée en classe, le professeur sera attentif à :

- Tous les élèves n'empruntent pas la même stratégie de résolution. Certaines stratégies possibles ne sont pas utiles pour la généralisation des formules comme le montre l'organigramme ci-dessous.

1e étape : calcul de l'angle manquant (β)		
2e étape : calcul de la hauteur h dans le triangle CHA à partir de $\sin(60°)$		
3e étape : calcul du côté c dans le triangle AHB à partir de $\sin(40°)$		
Ces trois premières étapes sont utiles pour la généralisation des formules du sinus dans un triangle quelconque.		
4e étape 		
Utilisation de Pythagore pour calculer a' et a'' dans les triangles respectifs CHA et AHB	Construction d'une autre hauteur h' et réitération des étapes 2 et 3.	Utilisation du $\cos(60°)$ et $\cos(40°)$ pour calculer a' et a'' dans les triangles respectifs CHA et AHB
Cette dernière étape sera utile pour la généralisation de la formule des cosinus dans un triangle quelconque.	*Cette étape sera utile pour la généralisation de la loi des sinus dans un triangle quelconque.*	*Cette stratégie, bien qu'intéressante d'un point de vue numérique, ne sera pas utile pour la généralisation de la formule des cosinus dans un triangle quelconque.*

Logique de construction de la formule de la règle des sinus

Numérique	Généralisation dans un triangle acutangle[3]
Voici un triangle quelconque ABC dont tu connais α qui vaut 80°, γ qui vaut 60° et b qui vaut 3 cm. **Calcule** les valeurs des angles et des côtés manquants	Voici un triangle quelconque ABC dont les angles sont notés respectivement α, β et γ et les côtés sont notés respectivement a, b et c **On cherche à écrire une relation entre $\boldsymbol{b, c, \beta, \gamma}$**
	
a) Calculer de l'angle manquant (β)	
Dans le triangle ABC, β = 180° - 80° - 60° = 40°	
b) ***Décomposer le triangle ABC en 2 triangles rectangles***	
 *Notons h la mesure de la hauteur $[AH]$relative au côté [CB].* *La hauteur $[AH]$ partage le triangle ABC en 2 triangles rectangles : AHB et CHA.*	
c) Exprimer la mesure de la hauteur, h, dans le triangle CHA à partir de sin (γ)	

[3] La généralisation des formules du sinus que nous proposons de mener à ce stade-ci de l'apprentissage n'est réalisable qu'avec des triangles acutangles. Les enseignants qui désirent étendre cette généralisation aux triangles obtusangles, devront attendre d'avoir abordé le cercle trigonométrique.

$\sin(60°) = \frac{h}{3}$ on en déduit : $h = 3.\sin(60°) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\sin(\gamma) = \frac{h}{b}$ on en déduit : $h = b.\sin(\gamma)$ (1)
d) Exprimer la hauteur h dans le triangle AHB à partir de sin(β)	
$\sin(40°) = \frac{h}{c}$	$\sin(\beta) = \frac{h}{c}$ (2)
e) Exprimer le côté c à partir de sin(β)	
Comme h = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, on obtient sin (40°) = $\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{c}$ On en déduit : c = 4,04cm	Comme $h = b.\sin(\gamma)$ (égalité 1) On obtient : $\sin(\beta) = \frac{b.\sin(\gamma)}{c}$ (substituer l'expression de h dans l'égalité 2) Donc : $c.\sin(\beta) = b.\sin(\gamma)$ (3) Alors $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ L'égalité 3 peut aussi être obtenue, par la méthode de comparaison à partir des égalités 1 et 2
	f) Exprimer le côté a en répétant le même raisonnement avec la hauteur relative au côté [AC].
	On en déduit que $a.\sin(\gamma) = c.\sin(\alpha)$ $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

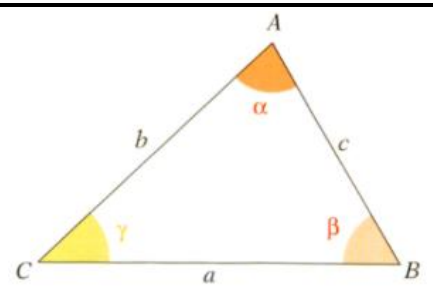
Dans un triangle quelconque ABC, $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Les rapports entre la mesure du côté et le sinus de l'angle opposé sont égaux

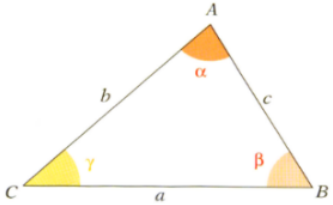
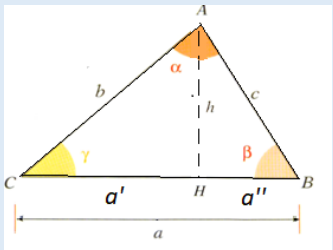
avec a, la mesure du côté [CB]

b, la mesure du côté [AC]

c, la mesure du côté [AB]



Logique de construction de la formule de la règle des cosinus[4]

Numérique	Généralisation
Voici un triangle quelconque ABC dont tu connais α qui vaut 80°, γ qui vaut 60° et b qui vaut 3 cm. **Calcule** les valeurs des angles et des côtés manquants	Voici un triangle quelconque ABC dont les angles sont notés respectivement α , β et γ et les côtés sont notés respectivement a, b et c. On cherche à écrire une relation entre b, a, c et le cos de l'angle défini par a et c
	
*g) **Décomposer le triangle ABC en 2 triangles rectangles***	
 *Notons h la mesure de la hauteur [AH] relative au côté [CB].* *La hauteur [AH] partage le triangle ABC en 2 triangles rectangles : AHB et CHA.* *Notons a', la longueur de [CH] et a'', la longueur de [HB]*	
h) Exprimer a'' dans le triangle BHA en utilisant Pythagore	
Comme $c^2 = h^2 + (a'')^2$ alors $4{,}04^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (a'')^2$ et $(a'')^2 = \cdots$.	$c^2 = h^2 + (a'')^2$ (1)
i) Exprimer a' dans le triangle CHA en utilisant Pythagore	
Comme $b^2 = h^2 + (a')^2$ alors $3^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{-2} + (a')^2$ et $(a')^2 = \cdots$	$b^2 = h^2 + (a')^2$
	j) Remplacer a'
	Or, $a' = a - a''$

[4] La démonstration vient à la suite de la démonstration de la formule des sinus, voilà pourquoi cette démonstration commence au point g.

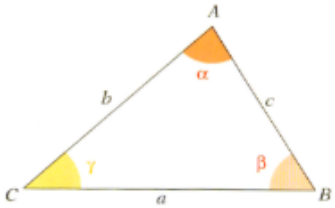
	Donc, $b^2 = h^2 + (a - a'')^2$ $b^2 = h^2 + a^2 - 2a.a'' + (a'')^2$ (2)
	k) Soustraire les égalités 1 et 2 (2)-(1)
	$b^2 - c^2 = h^2 + a^2 - 2a.a' + a''^2 - (h^2 + (a'')^2)$ $b^2 - c^2 = a^2 - 2a.a''$
	l) Exprimer a'' en fonction du $\cos(\beta)$ dans le triangle BHA
	Or, $a'' = c.cos(\beta)$ Donc, $b^2 = c^2 + a^2 - 2a.c.cos(\beta)$

Dans un triangle quelconque ABC,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cos(\gamma)$$



Point d'attention

Pour les élèves ayant des lacunes avec ces prérequis, nous vous suggérons de vous inspirer des fiches 14, 15 et 16 des pistes didactiques des évaluations externes non certificatives d'octobre 2014 http://www.enseignement.be/index.php?page=25102&navi=3207 .

Vous y trouverez :

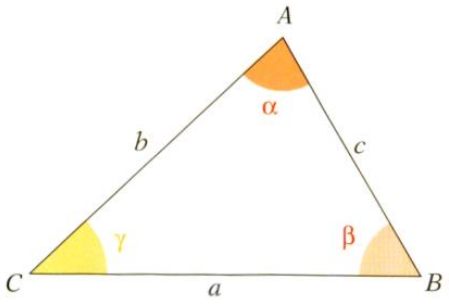
- Dans la fiche 14, des activités permettant de travailler la définition des nombres trigonométriques dans des situations non prototypiques. Ces fiches varient d'une part, par les notations utilisées pour les angles, les côtés, les sommets et, d'autre part, par les positions des triangles rectangles (situations non prototypiques).
- Dans la fiche 15, des activités permettant de rechercher l'amplitude d'un angle connaissant les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle. Elle débute par un exercice de recherche de l'amplitude d'un angle dont on connait un de ses nombres trigonométriques.
- Dans la fiche 16, des activités permettent de rechercher la longueur d'un côté connaissant l'amplitude d'un angle et la longueur d'un côté de l'angle droit ou de l'hypoténuse. Elles commencent par des exercices de transformation de formules utiles à la résolution de triangles.

2. Résolution de triangles quelconques

Fiche élèves

Enoncé

Pour chaque cas proposé, construis aux instruments la situation décrite, estime les valeurs des angles et des côtés manquants et vérifie par calcul ces derniers.



1er cas : Si l'on connaît 2 angles et un côté

α	β	γ	a	b	c
80°		60°		3	

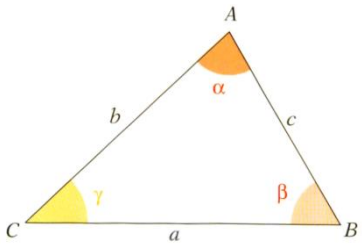
2ème cas : Si l'on connaît 2 côtés et l'angle compris entre ceux-ci

α	β	γ	a	b	c
	48°		2		5

3ème cas : Si l'on connaît les 3 côtés

α	β	γ	a	b	c
			3	5	7

4ème cas : Si l'on connaît 2 cotés et un angle adjacent à ceux-ci



A)

α	β	γ	a	b	c
30°			1	3	

B)

α	β	γ	a	b	c
30°			10	8	

C)

α	β	γ	a	b	c
30°			8	10	

Fiche prof

Méthodologie

Individuellement, chaque élève traite les différents cas. Une mise en commun permet d'expliciter et de confronter les différentes propositions et démarches élaborées pour y parvenir. De plus, ce temps de partage permettra de mettre en évidence les conflits cognitifs rencontrés à travers les différents cas.

Visées pédagogiques

Cette activité permet de :

- développer l'esprit analytique (choisir et appliquer les formules du sinus et du cosinus),
- expérimenter les limites des formules,
- expérimenter les limites de la calculatrice (elle donne une seule solution alors que la construction nous en donne deux),
- confronter une caractéristique des nombres trigonométriques des angles aigus (strictement positif) aux résultats obtenus.

1e cas :

Cette activité conduit l'élève à se familiariser avec les nouvelles formules sur une situation déjà rencontrée (2 angles aigus et le côté adjacent). Cela lui permet d'en saisir l'efficacité en termes de gain de temps.

2ème cas :

Après avoir calculé b en utilisant la formule d'Al Kashi, l'élève peut procéder de trois manières différentes pour résoudre cette situation. En fonction de sa stratégie de résolution, trois cas de figures peuvent apparaitre. Nous les détaillons ci-dessous :

Les élèves **doivent** utiliser la formule des cosinus pour déterminer b.

Ils utilisent la formule des sinus pour déterminer α

Ils font la somme des angles pour déterminer γ

Les élèves ne rencontrent aucun conflit cognitif

Ils utilisent la formule des sinus pour déterminer γ

Les élèves obtiennent une valeur de 70° pour l'angle γ alors que la construction lui donne 110°

Ils utilisent la formule des cosinus pour déterminer γ

Les élèves obtiennent un cosinus négatif. Nous pensons que certains élèves ne s'inquiéteront pas de ce résultat et continueront leurs calculs sachant que la calculatrice donnera la bonne valeur de γ

3ème cas :

Lorsque les 3 côtés sont donnés, l'élève est contraint d'utiliser la règle des cosinus pour déterminer l'amplitude d'un angle. Si l'élève commence par calculer l'amplitude de l'angle γ à partir de l'expression du côté c, il trouvera un cosinus négatif. Mais comme précédemment, la calculatrice donnera la bonne valeur de l'angle.

4ème cas :

a) Cette situation est impossible par construction et par calcul. En effet, l'élève constatera qu'il ne sait pas fermer son triangle en respectant les contraintes données. Par calcul, il trouvera des nombres trigonométriques plus grand que 1. C'est l'occasion de montrer aux élèves l'intérêt de passer par la construction avant de se lancer dans des calculs inutiles.

b) Cette situation n'engendrera aucun conflit cognitif.

c) La construction de cette dernière situation amènera les élèves à trouver deux solutions (2 triangles possibles) alors que la calculatrice n'en fournit qu'une. L'élève est confronté à un conflit cognitif. Ce constat nous amène à construire la définition des nombres trigonométriques d'angles obtus à partir d'un support différent : le cercle trigonométrique.

Pour diversifier vos évaluations, nous vous invitons à consulter la fiche 19 des pistes didactiques des évaluations externes non certificatives d'octobre 2014. Vous y trouverez un exemple de question illustrant chaque processus (connaitre, appliquer, transférer) :

http://www.enseignement.be/index.php?page=25102&navi= 3207 .

3. Le cercle trigonométrique en mouvement…

Fiche élèves

Construction du cercle trigonométrique

1ère partie :

Sur une feuille de papier millimétré,

1. En considérant que l'unité de longueur mesure 5 cm, dessine un repère orthonormé d'origine O tel que les points E et U ont respectivement pour coordonnées (1,0) et (0,1).

2. Dessine ensuite le point A_1, image du point E par une rotation de centre O et d'angle + 30° ; détermine les coordonnées de A_1.

   Fais de même pour les points A_2, A_3, image de E par les rotations de centre O et d'angle respectivement égal à +45°, +60°.

   Note tes réponses dans le tableau ci-dessous

Angle de rotation	**Image de E par la rotation**	**Coordonnées du point A_i**	
		abscisse	**ordonnée**
30°			
45°			
60°			

Fiche prof

Visées pédagogiques

- Construire le cercle trigonométrique par une approche dynamique.

  Nous qualifions cette construction de « dynamique » car le cercle apparaît comme étant la trace des rotations successives d'un point dans un repère. Cela va à contre sens de ce qui est habituellement proposé en classe : on trace le cercle trigonométrique et ensuite on y place les points.
- Calculer les coordonnées du point image d'une rotation (d'angles particuliers) à partir des relations trigonométriques dans le triangle rectangle.
- Définir les nombres trigonométriques des angles du premier quadrant.
- Exprimer la longueur d'un segment en fonction d'une unité de référence.
- Amener la nécessité d'un calcul pour déterminer la valeur exacte des coordonnées d'un point suite à une rotation.

Méthodologie

Individuellement, chaque élève construit les rotations demandées et détermine les coordonnées du point image.

- A l'issue de ce temps, l'enseignant récolte et analyse avec les élèves les valeurs obtenues. Les différences peuvent être expliquées à partir de deux critères :
  - les stratégies utilisées :
    - approximer les coordonnées au départ d'un instrument de mesure,
    - calculer les coordonnées au départ des relations trigonométriques dans le triangle rectangle,
  - l'unité de mesure utilisée (le cm ou l'unité de longueur donnée).

- Les observations menées durant la première partie de cette activité permettent d'associer les valeurs des abscisses et des ordonnées aux nombres trigonométriques vus en 3e.

  Pour d'autres angles du premier quadrant, l'enseignant, en comparant la valeur du cosinus de l'angle donnée par la calculatrice avec l'abscisse du point image, étend ce constat à d'autres angles.

- La conclusion de cette activité peut s'énoncer en les termes suivants :
  « *L'image d'un point E obtenue par une rotation de centre O et d'angle* α *a pour coordonnées* $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ *pour des angles compris entre 0° et 90°.* ».

La seconde partie de l'activité questionne cette caractéristique pour des amplitudes d'angle au-delà de 90°.

Fiche élèves

Construction du cercle trigonométrique

2ème partie :

1. Dessine les points A_4, A_5, A_6 … images du point E par une rotation de centre O et d'angle + 120°, + 135°, +150°, -120°, -135° -150°, -30°, - 45°, -60° sur le repère construit dans la première partie.
2. En t'appuyant sur les résultats de la première partie de l'activité, détermine les coordonnées de A_4, A_5, A_6 …. et note tes réponses dans le tableau ci-dessous.
3. Détermine les coordonnées des points définis par les rotations d'angle +180°, +360°, 0°, + 90°, - 90°.

Angle de rotation	**Image de E par la rotation**	**Coordonnées du point A_i**	
		abscisse	**ordonnée**
+120°			
+135°			
+150°			
-120°			
-135°			
-150°			
-30°			
-45°			
-60°			

Fiche prof

Visées pédagogiques

- Construire le cercle trigonométrique par une approche dynamique.
- Déterminer les coordonnées du point image d'une rotation (d'angle d'amplitude supérieure à 90°) à partir des symétries.
- Définir les nombres trigonométriques d'un angle d'amplitude comprise entre 0° et 360°.
- Mettre en évidence les angles qui ont le même nombre trigonométrique.
- Placer des informations sur le cercle trigonométrique.
- Lire des informations sur le cercle trigonométrique.

Méthodologie

- Individuellement, chaque élève construit les rotations demandées dans la question 1.
  - A ce stade, le professeur va pouvoir définir le cercle trigonométrique comme la trace des rotations effectuées. Il importe de demander aux élèves de se déplacer sur le cercle trigonométrique en identifiant d'autres angles. On portera une attention particulière aux angles de +180°, +360°, 0°, + 90°, -90°.

- Pour la question 2, chaque élève détermine les coordonnées du point A_4. La suite de l'activité sera menée par l'enseignant.
  - Pour déterminer les coordonnées, l'élève dispose de plusieurs outils :
    - la notion de symétrie (effet des transformations sur les coordonnées en ce compris la rotation de +90° et -90°)
    - la calculatrice,
    - …
  - On sera attentif à ce qu'il n'y ait pas de confusion entre l'amplitude de l'angle de rotation et l'amplitude de l'angle présent dans le triangle considéré.
  - A l'issue de cette activité, l'enseignant étend la définition du sinus et cosinus pour tous les angles au-delà de 90° comme abscisse et ordonnée du point qui définit l'angle.

- La dernière question conduit l'élève à considérer les cas limites.
  - On distinguera le statut des différents « zéros » présents sur la représentation :
    L'origine du repère (0,0), l'angle d'amplitude nulle (0°) , la valeur nulle du sinus et du cosinus.

Lorsque l'élève manipule facilement le cercle trigonométrique, il doit revenir aux différents cas abordés lors de la fiche 2 « résolution de triangles quelconques » afin de vérifier que l'outil permet de lever tous les problèmes rencontrés précédemment.

Ce sera l'occasion d'expliciter clairement aux élèves le fait que la machine ne donne pas toutes les solutions mais un seul angle[5]. La solution doit être complétée en s'appuyant sur le cercle trigonométrique.

[5]L'angle donné par la calculatrice est celui qui appartient au domaine restreint de la fonction sinus ou cosinus qui a permis de définir sa réciproque.

4. Le cercle trigonométrique en papier…

Fiche élèves

Construction du cercle trigonométrique

Les élèves disposent d'un disque en papier de 10 cm de rayon

Etape 1 :

Plie le disque papier reçu en 4 parts égales.

Etape 2 :

Plie le quart de disque obtenu en 2 parts égales.
Plie le quart de disque obtenu en 3 parts égales.

Etape 3 :

Déplie le disque et repère sur la circonférence du cercle, les points correspondant aux angles de 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 310°, 315°, 330° et 360°

Etape 4 :

Plie le disque papier afin de repérer le $\cos(60°)$ et le $\sin(30°)$
Situe sur les axes du repère la valeur du $\cos(60°)$ et la valeur du $\sin(30°)$

Etape 5 :

Plie le disque afin de repérer les nombres trigonométriques de tous les autres angles marqués sur le disque.
Situe sur les axes les valeurs particulières.

Fiche prof

Visées pédagogiques

Cette activité permet de :

- Construire un outil « papier », un support concret qui sera manipulable tout le long des apprentissages :
  - lors de la résolution des triangles quelconques en 4ème ;
  - lors de la construction des fonctions trigonométriques en 5ème et de la résolution d'équations trigonométriques.
- Mobiliser la définition des nombres trigonométriques d'un angle quelconque, les angles ayant les mêmes nombres trigonométriques et les valeurs des nombres trigonométriques des angles particuliers.
- Placer des informations sur le cercle trigonométrique (angles particuliers, leurs nombres trigonométriques).
- Lire des informations sur un cercle trigonométrique.
- Identifier les éléments nécessaires pour permettre la lecture d'informations sur le cercle trigonométrique (l'origine et les unités sur les axes, le zéro degré, sens de lecture).

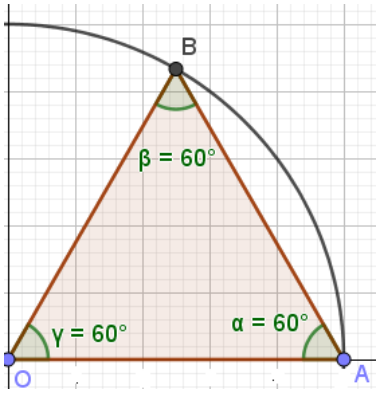
Méthodologie

Individuellement, chaque élève effectue les manipulations demandées sous une guidance éventuelle de son enseignant.

- **L'étape 2** vise à construire les angles de 30°, 45° et 60° par pliage. L'angle de 60° étant construit, un partage en deux amènera celui de 30°.

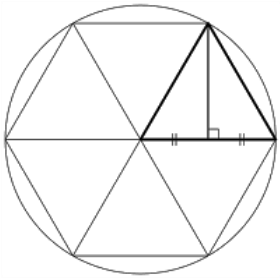
  Comment plier le quart de disque pour représenter un angle de 60° ?

  Avant de se lancer tête baissée dans une recherche de la construction, il est utile d'évoquer et de représenter le résultat à obtenir.



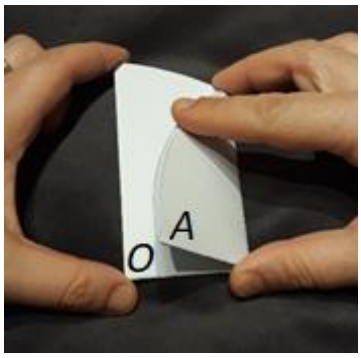
Deux démarches sont possibles. Elles sont basées sur les propriétés du triangle équilatéral :

- Méthode 1
  La première construction se base sur l'idée que, dans un triangle équilatéral, la hauteur et la médiatrice relatives au même côté sont confondues.

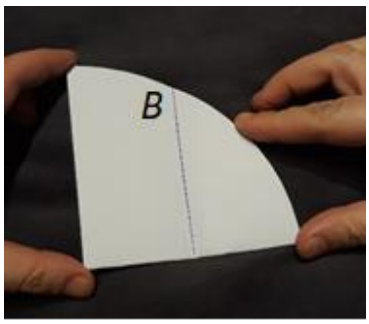


Dans ce cas,

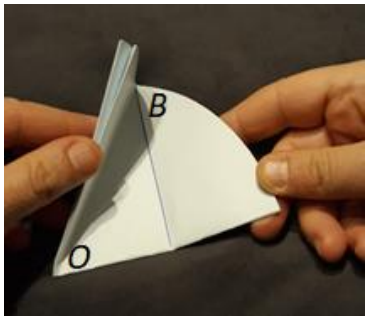
- Plier pour amener le point A sur le point O.



- Nommer B, le point obtenu à l'intersection de la hauteur et de la circonférence du disque.

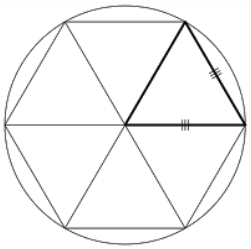


- Plier pour relier les points O et B



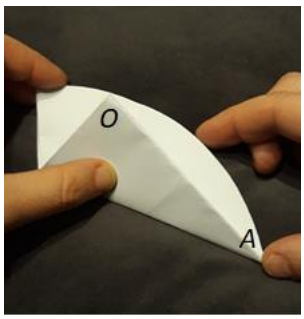
- Méthode 2

  La seconde construction se base sur l'idée que, dans un triangle équilatéral, les 3 côtés sont de même mesure.

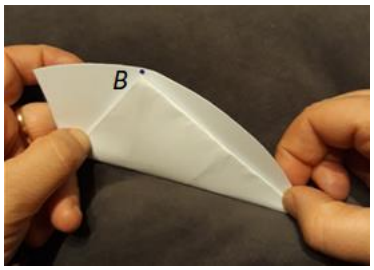


Dans ce cas,

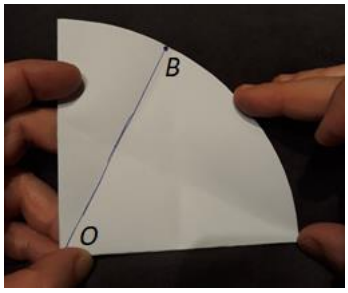
- Reporter la distance $|OA|$ à partir de A
  Amener le segment OA tel que le point A soit fixe et le point O se trouve sur la circonférence du disque.



- Nommer B, le point obtenu à l'intersection de la circonférence du disque.

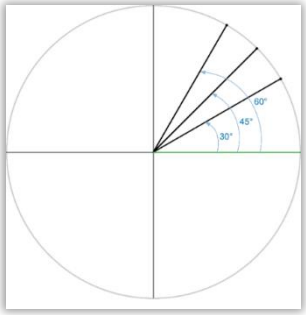


- Plier pour relier les points O et B



A l'étape 3,

Le professeur en comparant les différentes productions des élèves met en évidence la nécessité de se donner un repère pour placer et lire des informations sur le disque.

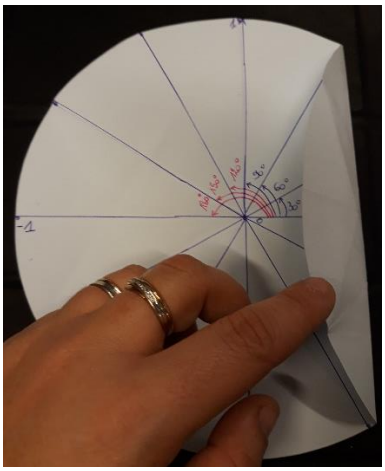


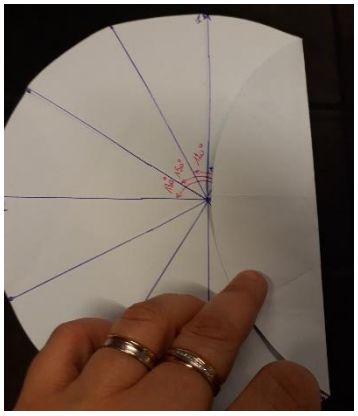
A l'étape 4,

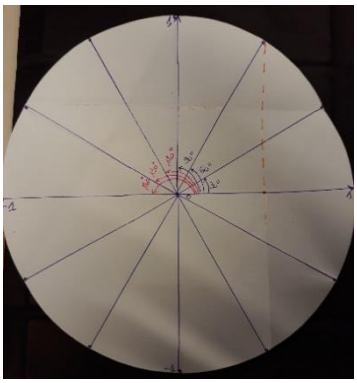
A cette étape, il est intéressant d'amener les élèves à verbaliser la démarche suivie pour faire apparaître le $\cos(60°)$ afin d'identifier la connaissance qu'il a utilisée.

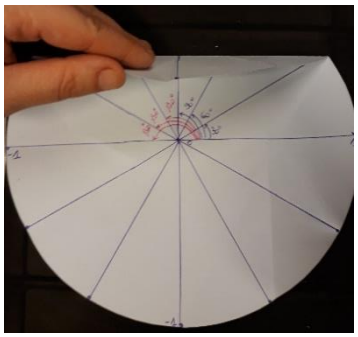
1) L'élève utilise la définition du cosinus d'un angle ainsi que la valeur de cet angle particulier ($\cos(60°) = 1/2$).

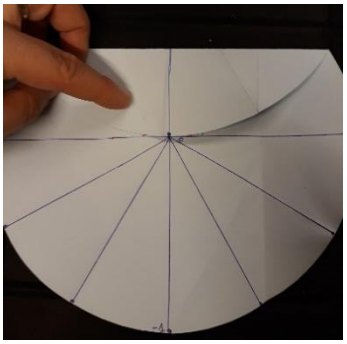
2) L'élève utilise l'observation faite dans l'activité précédente : 60° et -60° ont le même cosinus.

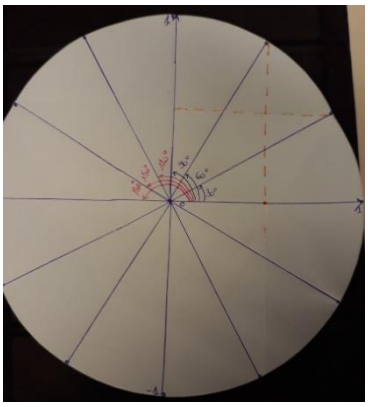






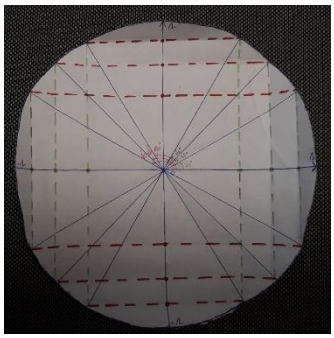


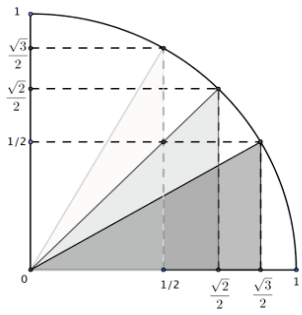




Point d'attention

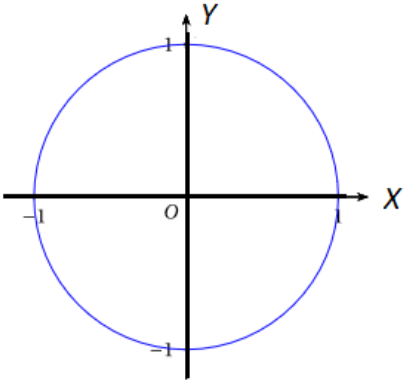
Lorsque cette activité est menée en classe, on sera attentif à noter l'amplitude de l'angle dans le cercle et non pas sur un point à la circonférence du cercle.





5. Exerçons-nous à utiliser le cercle trigonométrique

Enoncé



1. Représente sur le cercle trigonométrique les angles 20°, -20°, 120°, -90°, -180°, 225° et 330° ainsi que leur sinus et leur cosinus.

2. Vrai ou faux ? Justifie.

   Si $90° < \alpha < 180°$ alors $\cos(\alpha)$est négatif.

   Si $270° < \alpha < 360°$ alors $\sin(\alpha)$ est positif.

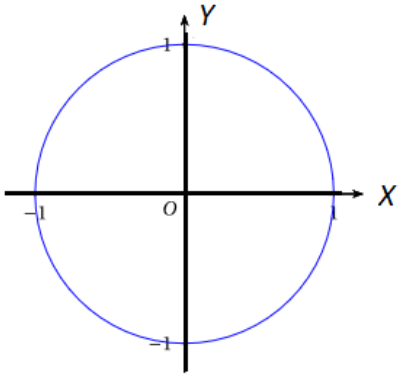
   Si $180° < \alpha < 270°$ alors $\sin(\alpha)$ est négatif.

3. Dans quel quadrant se trouve α sachant que

   a. $\sin(\alpha) < 0$ et $\cos(\alpha) < 0$?

   b. $\sin(\alpha) < 0$ et $\cos(\alpha) > 0$?

   c. $\sin(\alpha) > 0$ et $\cos(\alpha) < 0$?

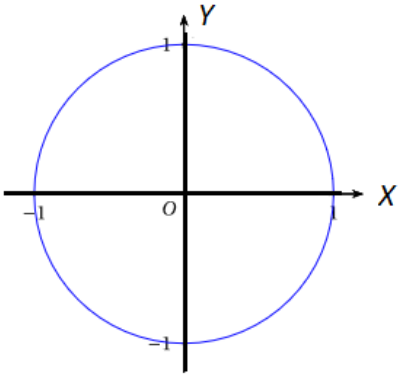


4. Représente sur le cercle trigonométrique :

   a. le ou les angle(s) dont le cosinus vaut 0,6

   b. le ou les angle(s) dont le sinus vaut -0,5

   c. le ou les angle(s) dont le cosinus vaut -0,8



5. Détermine l'amplitude des angles dont le cosinus vaut -0,4

   Détermine l'amplitude des angles dont le sinus vaut 0,78

   Détermine l'amplitude des angles dont le cosinus vaut 1,5

   Détermine l'amplitude des angles dont le sinus est nul

   Détermine l'amplitude des angles dont le cosinus est nul

   après avoir visualisé la situation sur le cercle trigonométrique.

6. Sachant que $\cos(60°) = \frac{1}{2}$, détermine les valeurs de :

   a. $\cos(-60°)$
   b. $\cos(120°)$
   c. $\cos(180°)$
   d. $\cos(300°)$
   e. $\cos(240°)$

7. Sachant que $\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, détermine les valeurs de :

   a. $\sin(-45°)$
   b. $\sin(90°)$
   c. $\sin(135°)$
   d. $\sin(225°)$
   e. $\sin(315°)$

8. Complète par = ou ≠

   a. $\sin(20°)$ … … … $\sin(160°)$
   b. $\cos(60°)$ … … … $\sin(30°)$
   c. $\cos(160°)$ … … … $-\cos(20°)$

Fiche prof

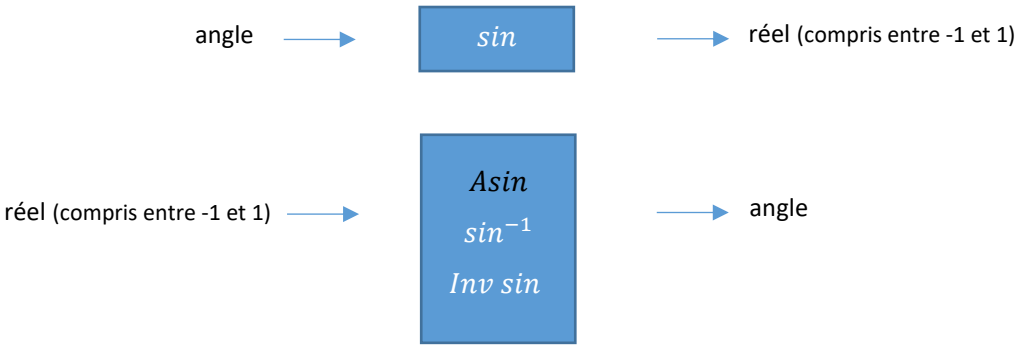
Visées pédagogiques

Familiariser les élèves avec le cercle trigonométrique, à savoir :

- Être à l'aise avec l'outil
- S'y déplacer facilement
- Aller chercher des informations pertinentes et utiles,

Points d'attention

- L'objectif de cette UAA est de développer la compétence « Résoudre des problèmes en utilisant des outils trigonométriques ». Dans cette perspective, tout le long de cette UAA l'amplitude des angles est exprimée en degré. Le radian est abordé en 5ème avec les fonctions trigonométriques.
- Cette activité peut être proposée aux élèves en apprentissage dans la perspective de favoriser l'utilisation du cercle trigonométrique (se déplacer et y lire des informations) et non de formaliser la théorie des angles associés qui n'est pas au programme.
- Volontairement, la question « Résous les équations trigonométriques suivantes » n'apparaît pas car cela ne fait pas partie des processus à évaluer en 4e.
  Néanmoins, pour aider l'élève à placer et lire des informations sur le cercle trigo, il peut être intéressant de lui demander (en langage courant) de déterminer l'amplitude de (des) angles(s) dont le nombre trigonométrique est donné. Cet exercice permet de distinguer l'inconnue(angle) de la contrainte portant sur le nombre trigo au départ d'une question explicite et non d'une égalité algébrique. Une formalisation trop rapide de cette question (l'équation trigonométrique) pourrait mettre certains élèves en difficulté.
- Lors de cette activité en classe, le professeur sera attentif à :
  - Construire le cercle trigonométrique et non le demi-cercle trigonométrique afin d'être complet et faciliter le travail en 5e sur les fonctions.
  - Limiter le travail sur le cercle trigonométrique aux angles compris entre **[0°, 360°]** La périodicité sera enseignée en lien avec les fonctions trigonométriques en 5ème.
  - Utiliser la notation $\sin(\alpha)$ plutôt que $\sin\alpha$ pour éviter certaines erreurs récurrentes telle que la présence d'une multiplication entre sin et α.
  - Préciser la nature de l'entrée et de la sortie lors de l'utilisation des touches sin , sin^{-1}, $Asin$, $Inv\ sin$ (selon les machines) en proposant des schémas comme ci-dessous.



Tangente géométrique ou tangente trigonométrique ?

Fiche élèves

Enoncé

Sur une feuille de papier millimétré,

1. En considérant que l'unité de longueur mesure 5 cm, dessine un cercle trigonométrique.
2. Représente un angle de 30° et nomme A le point représentant cet angle sur le cercle
3. Repère le cosinus et le sinus de l'angle de 30° sur les axes respectifs et note-les respectivement $\overline{OB}$ et $\overline{OC}$.

Première partie :

4. Trace la tangente au cercle en A.
5. Note F l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.
6. Exprime la tangente de 30° dans le triangle rectangle OAF.
7. Vérifie sur le dessin que cela correspond à la valeur particulière connue de tan (30°)
8. Construis un triangle isométrique au triangle OAF tel que $\widehat{DOA}° = \widehat{AOB}° = 30°$ et que D soit sur l'axe des abscisses. Prouve que le triangle ODE est isométrique au triangle OAF.
9. Qu'en tires-tu comme conclusion au niveau de la tangente de 30° ?

Deuxième partie :

10. Prouvez que les triangles OAB et OED sont semblables.
11. Vérifiez que $\tan(30°) = \frac{\sin(30°)}{\cos(30°)}$

Fiche prof

Visées pédagogiques

En 2e, les élèves ont abordé la notion de tangente dans un cercle (tangenté géométrique) et savent qu'à chaque point du cercle correspond une tangente qui est la perpendiculaire au rayon passant par ce point.

En 3e, les élèves ont abordé la notion de tangente d'un angle dans un triangle rectangle (tangente trigonométrique) comme étant le rapport entre la longueur du côté opposé et la longueur du coté adjacent.

En 4e , l'objectif poursuivi dans l'activité est d'articuler les deux pré-requis cités précédemment afin de faire évoluer le concept de tangente et de lui donner une nouvelle représentation géométrique sur le cercle trigonométrique. De plus, cette activité permet de prouver la relation fondamentale $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ en établissant des liens entre triangles semblables et nombres trigonométriques[6].

Pour ce faire, nous vous suggérons de passer par un exemple numérique ou deux avant la généralisation de la représentation géométrique de la tangente et de sa définition.

Au regard de tout cela, cette activité permet de **réactiver**, chez les élèves, les notions suivantes :

- La notion de tangente à un cercle,
- Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle,
- L'utilisation de la calculatrice,
- Les notions de valeur exacte et valeur approchée
- Les triangles isométriques,
- Les triangles semblables,
- L'utilisation de l'équerre et du compas

Au regard de tout cela, cette activité permet de **travailler les trois puces du processus « connaitre »** du programme :

- Représenter sur un cercle trigonométrique un point correspondant à un angle ainsi que ses nombres trigonométriques.
- Etablir les liens entre triangles semblables et nombres trigonométriques
- Interpréter géométriquement la relation $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Méthodologie

Contrairement aux activités précédentes, celle-ci sera menée en groupe classe. Ce sont les interactions entre le professeur et les élèves qui vont permettre la construction de la tangente.

La première partie de l'énoncé permet de généraliser la construction de la tangente. L'enseignant devra donc préciser à l'issue de celle-ci que la tangente de n'importe quel angle dans le cercle trigonométrique sera représentée sur la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses sur laquelle on pourra aller lire la mesure de la tangente de n'importe quel angle.

La deuxième partie de l'énoncé permet de prouver la relation principale $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

[6] CFR page 49 du programme

Démonstration de la tangente dans le cercle trigonométrique

- **Première partie de la démonstration :**

  « Pourrait-on tracer la tangente en n'importe quel point du cercle A ? »

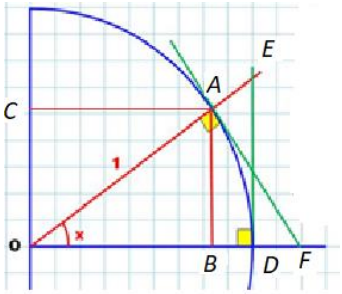
tan(30°) = $\frac{\overline{AF}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AF}}{1} = \overline{AF}$

tan(30°) = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Les triangles ODE et OAF sont isométriques car :

$$\left.\begin{array}{r}\overline{OD} = \overline{OA} = 1 \\ \widehat{ODE} = \widehat{OAF} = 90° \\ \widehat{EOD} = \widehat{FOA} = 30°\end{array}\right\} \Rightarrow ODE\ iso\ OAF$$

$\overline{ED} = \overline{AF}$ = tan (30°)



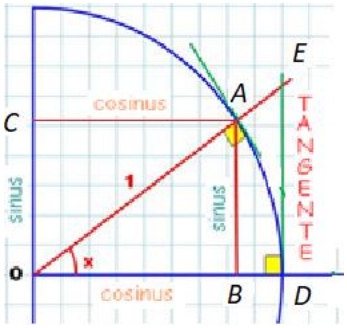
La tangente d'un angle aigu, ici 30°, peut donc se représenter par la longueur du segment [AF] ou [ED].

On peut donc expliquer aux élèves que les notions géométriques de tangente d'un angle en tant que nombre trigonométrique et tangente à un cercle en un point se correspondent parfaitement.

- **Deuxième partie de la démonstration :**

  « Pourquoi la tangente d'un angle ∝ définie comme rapport de sin (α) sur cos (α) peut-elle se représenter en traçant la tangente au point (1,0) du cercle trigonométrique ? »

Sur la figure, on repère deux triangles semblables OAB et OED car ils ont deux angles homologues de même amplitude.



6. Vu que

OAB

OED

$$\Rightarrow \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{DE}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(30°)}{1} = \frac{\sin(30°)}{\overline{ED}}$$

$$\Rightarrow \overline{ED} = \frac{\sin(30°)}{\cos(30°)} = \tan(30°)$$

On voit ainsi que la tangente d'un angle aigu peut se représenter sur la tangente au cercle en D (perpendiculaire au cercle mené par le point (1,0).

Annexe – Quelques repères historiques…

(1) Association Sciences en Seine et Patrimoine (ASSP Rouen) [En ligne] (page consultée le 15 janvier 2020). http://assprouen.free.fr/dossiers/trigonometrie.php

(2) COLESSE, S., and VASSARD, C. Les tables trigonométriques. Compte-rendu du colloque inter-IREM de Nantes (2006). http://assprouen.free.fr/dossiers/tables_trigonometriques.php

(3) CREM. Pour une culture mathématique accessible à tous, Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes, 2004. M. Ballieu et M.-F. Guissard coordinateurs. : http://www.maths-et-tiques.fr/telech/develop_trigo.pdf

(4) De Kee, S., Mura, R., and Dionne, J. La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez les élèves du secondaire. For the Learning of Mathematics 16 (2) (1996), 19–27.

(5) Lefort, J. Petite histoire de la trigonométrie. L'Ouvert, 91 (1998), 10–16. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/L_Ouvert/n091/o_91_10-16.pdf

(6)Looze, A. La trigonométrie : une histoire à l'envers tournée vers le ciel. Diapositives pour une formation CECAFOC, 2014.

(7) Pierard, M. Histoire et instruments de la trigonométrie. Losanges 30 (2015), 13-24. https://www.sbpm.be/2015/09/losanges-30/

(8) Plane, H. Vers la trigonométrie. Au fil des maths, de la maternelle à l'université - Bulletin de l'APMEP 532 (2019), 86–89.

(9) Proulx, J. L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique. Bulletin de l'Association Mathématique du Québec XLIII, 3 (2003), 13–27 https://www.researchgate.net/publication/338236764_L'histoire_de_la_trigonometrie_comme_outil_de réflexion didactique.

(10) Association Sciences en Seine et Patrimoine (ASSP Rouen) [en ligne] . (page consultée le 15 janvier 2020). http://assprouen.free.fr/dossiers/trigonometrie.php

(11) Tanguay, D. Degrés, radians, arcs et sinusoïdes. Petit x 82 (2010), 59–71. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/82x5_1560852687847-pdf

(12) Vadcard, L. Conception de l'angle chez les élèves de seconde. Recherches en didactique des mathématiques 22, 1 (2002), 77–117.

(13) Youschkevitch A., Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles). Librairies philosophiques J. VRIN, 1976.